ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN VĂN QUYÊN

VỀ TÍNH CHIA HẾT CỦA CÁC SỐ FIBONACCI SUY RỘNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN VĂN QUYÊN

VỀ TÍNH CHIA HẾT CỦA CÁC SỐ FIBONACCI SUY RỘNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: **Phương pháp Toán sơ cấp**
Mã số: **60 46 01 13**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. NGÔ VĂN ĐỊNH

Thái Nguyên - 2017

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của TS. Ngô Văn Định, Trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất tới TS. Ngô Văn Định, người đã định hướng chọn đề tài và tận tình hướng dẫn để tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới Phòng Đào tạo, các thầy cô giáo dạy cao học chuyên ngành Phương pháp toán sơ cấp, trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên đã giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn tốt nghiệp.

Tôi xin được gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè, người thân đã luôn động viên, cổ vũ, tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2017

Tác giả

Nguyễn Văn Quyên

Mở đầu

Dãy số Fibonacci $\{F_n\}$ là dãy số được rất nhiều người biết đến, quan tâm và nghiên cứu. Có rất nhiều tính chất thú vị của dãy số này đã được tìm ra. Dãy số Fibonacci được định nghĩa bởi phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \geq 0,$$

với điều kiện ban đầu $F_0 = F_1 = 1$. Khái niệm về dãy Fibonacci được mở rộng theo nhiều cách khác nhau. Mục đích của luận văn này là trình bày lại một số kết quả về một số dãy Fibonacci $\{x_n\}$ suy rộng xác định bởi

$$x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n, n \geq 0,$$

với $x_0 = a, x_1 = b$, trong đó p, q, a, b là các số nguyên không âm.

Đầu tiên, Luận văn trình bày lại kết quả của Panwar, Singh và Gupta [9] về một số tính chất thú vị của hai dãy Fibonacci suy rộng $\{V_n\}$ và $\{U_n\}$ được xác định bởi

$$V_{n+2} = V_{n+1} + 2V_n, n \geq 0, \text{ với } V_0 = 2, V_1 = 2,$$

và

$$U_{n+2} = U_{n+1} + 2U_n, n \geq 0, \text{ với } U_0 = 2, U_1 = 0.$$

Tiếp theo, Luận văn trình bày một số kết quả của Hoggatt và Long [4] về dãy Fibonacci suy rộng $\{u_n\}$ được xác định bởi phương trình sai phân

$$u_{n+2} = pu_{n+1} + qu_n, n \geq 0, \text{ với } u_0 = 0, u_1 = 1,$$

trong đó p, q là hai số nguyên dương. Cuối cùng, Luận văn trình bày lại các kết quả của Aoki và Sakai [2, 3] về dãy Fibonacci suy rộng $\{G_n\}$ xác định bởi

$$G_{n+2} = G_{n+1} + G_n, n \geq 1, \text{ với } G_1 = a, G_2 = b,$$

trong đó a, b là hai số nguyên.

Cấu trúc của luận văn

Luận văn được trình bày thành 2 chương:

• Chương 1: Dãy Fibonacci suy rộng. Trong chương này, chúng tôi trình bày sơ lược về lý thuyết về phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất; khái niệm về dãy Fibonacci suy rộng và các kết quả của Panwar, Singh và Gupta [9].

• Chương 2: Tính chia hết của các số Fibonacci suy rộng. Chương này trình bày về một số kết quả của Hoggatt và Long [4]; các kết quả của Aoki và Sakai [2, 3].

Chương 1

Dãy Fibonacci suy rộng

Trong chương mở đầu này, chúng tôi trình bày sơ lược về phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất đặc biệt là về nghiệm của phương trình trong trường hợp phương trình đặc trưng có hai nghiệm phân biệt. Sau đó, chúng tôi trình bày khái niệm về dãy Fibonacci suy rộng và các kết quả của Panwar, Singh và Gupta [9] về hai trường hợp riêng của dãy Fibonacci suy rộng.

1.1 Phương trình sai phân tuyến tính cấp 2

Trong mục này, chúng tôi nhắc lại khái niệm về phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất và đặc biệt chúng tôi trình bày về công thức nghiệm của phương trình này trong trường hợp đa thức đặc trưng có hai nghiệm phân biệt. Đây là những kiến thức cần thiết cho các nội dung của các phần sau trong Luận văn. Nội dung về phương trình sai phân chúng tôi tham khảo trong tài liệu [7].

Định nghĩa 1.1. Phương trình có dạng

$$u_{n+2} = Au_{n+1} + Bu_n, n = 1, 2, ..., \tag{1.1}$$

trong đó A, B là các hằng số, được gọi là *phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất.*

Để tìm nghiệm của phương trình sai phân (1.1), chúng ta xét phương trình bậc hai

$$\alpha^2 - A\alpha - B = 0. \tag{1.2}$$

Phương trình bậc hai này được gọi là phương trình đặc trưng của phương trình sai phân (1.1). Định lý sau đây cho chúng ta công thức nghiệm của phương trình sai phân (1.1) trong trường hợp phương trình đặc trưng (1.2) có hai nghiệm phân biệt. Ở đây, chúng tôi chỉ trình bày nội dung của định lý để có thể sử dụng trong các phần sau mà không trình bày chứng minh.

Định lý 1.2 ([7, Theorem 10.1])**.** *Giả sử phương trình đặc trưng (1.2) có hai nghiệm phân biệt α_1 và α_2. Khi đó phương trình sai phân (1.1) có nghiệm là*

$$u_n = C_1\alpha_1^n + C_2\alpha_2^n, n = 1, 2, ..., \tag{1.3}$$

trong đó C_1 và C_2 là những số bất kì.

Chúng ta cũng cần chú ý rằng, nếu biết điều kiện ban đầu u_0 và u_1 thì các hằng số C_1 và C_2 hoàn toàn được xác định. Khi đó, dãy số $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ được xác định bởi

$$u_n = \frac{a\alpha_1^{n-1} - b\alpha_2^{n-1}}{\alpha_1 - \alpha_2}, n \geq 2, \tag{1.4}$$

trong đó α_1, α_2 là hai nghiệm của phương trình đặc trưng (1.2) và $a = u_2 - u_1\alpha_2, b = u_2 - u_1\alpha_1$. Công thức (1.4) được gọi là công thức

Binet của dãy $\{u_n\}$. Tên công thức này được đặt theo tên của nhà toán học người Pháp Jacques Philippe Marie Binet do ông đã tìm ra công thức Binet cho dãy Fibonacci vào thế kỷ 19.

Ví dụ 1.3. Ta sẽ xét ở đây một ví dụ rất quen thuộc về dãy số Fibonacci $\{F_n\}$ được xác định bởi phương trình sai phân

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \tag{1.5}$$

với điều kiện ban đầu $F_1 = 1, F_2 = 1$.

Phương trình đặc trưng của phương trình (1.5) là

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Phương trình đặc trưng này có hai nghiệm phân biệt là

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ và } \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình (1.5) là

$$F_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, n = 1, ...$$

Từ điều kiện ban đầu $F_1 = 1, F_2 = 1$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1, \\ C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được $C_1 = -C_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Từ đó suy ra số hạng tổng quát của dãy số Fibonacci là

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], n = 1, 2, ...$$

Ví dụ 1.4. Ta tiếp tục xét một ví dụ khác cũng là một dãy số quen thuộc - dãy số Lucas $\{L_n\}$. Dãy Lucas cũng được xác định bởi phương trình sai phân (1.5) nhưng với điều kiện ban đầu $L_0 = 2$ và $L_1 = 1$. Vì vậy, số hạng tổng quát của dãy Lucas cũng có dạng:

$$L_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n, \text{ với } n = 1, 2, ...,$$

trong đó

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ và } \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Với điều kiện ban đầu $L_0 = 2, L_1 = 1$, ta được:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = 1. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $C_1 = 1, C_2 = 1$. Vậy ta có

$$L_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

1.2 Định nghĩa dãy Fibonacci suy rộng

Khái niệm của dãy Fibonacci được mở rộng dưới nhiều dạng khác nhau. Chẳng hạn như, Kalman và Mena [6] đã nghiên cứu dãy số xác định bởi

$$F_n = aF_{n-1} + bF_{n-2}, n \geq 2, \text{ với } F_0 = 0 \text{ và } F_1 = 1.$$

Ngoài ra, Horadam [5] cũng đã định nghĩa một dãy Fibonacci suy rộng $\{H_n\}$ bởi

$$H_n = H_{n-1} + H_{n-2}, n \geq 3, \text{ với } H_1 = p \text{ và } H_2 = p + q,$$